

УДК 539.375

Р.Ф. КАСУМОВ

Азербайджанский технологический университет, г. Гянджа

ВЛИЯНИЕ ИНОРОДНЫХ УПРУГИХ ВКЛЮЧЕНИЙ НА НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПЕРФОРИРОВАННЫХ ПЛАСТИН СИТОВЫХ УСТРОЙСТВ

В статье исследуется влияние упругих кольцевых включений из инородного материала на напряженно-деформированное состояние пластины ситового устройства. В поставленной задаче рассматривается перфорированная пластина, ослабленная двоякопериодической системой круговых отверстий, часть которых подкреплена упругими шайбами. Для решения предложенной задачи выведены системы алгебраических уравнений, найдены значения комплексных потенциалов представлений уравнений и выведена формула для определения давления на контуре отверстия.

Ключевые слова: напряженно-деформированное состояние, перфорированная пластина, упругие кольцевые включения

Как показывает опыт, разрушение многих машин, конструкций и аппаратов, как правило, начинается с поверхности различных отверстий, включений, щелей и других концентраторов напряжения, ослабляющих детали машин. Наличие областей повышенных напряжений вблизи отверстий создает благоприятные условия для роста трещин, что, в свою очередь может привести к полному разрушению конструкции.

В пищевой промышленности имеется значительное число аппаратов и машин, нагруженным узлом которых являются ситовые элементы конструкции. Исследование поля напряжений в плоскости, ослабленной бесконечной и, в определенном смысле, правильной системой отверстий, является одной из важных проблем плоской теории упругости и издавна привлекает к себе внимание ученых. К первым публикациям по данному вопросу относятся работы [1, 2]. Имея в виду эффективное решение двоякопериодических задач плоской теории упругости, следует в первую очередь отметить серию статей [3, 4, 5], в которых получил дальнейшее развитие упомянутый выше метод [2]. Авторами решено значительное количество двоякопериодических задач для случая круглых отверстий, рассматривается общая двоякопериодическая задача теории упругости для изотропной среды, когда в пределах параллелограмма периодов имеется группа непересекающихся произвольных отверстий, во второй отверстия полагаются заполненными различными инородными включениями. Показано существование единственного решения указанных задач и решены задачи приведения для обоих видов решеток.

Для повышения прочности ситовых устройств шнековых прессов, сепараторов и других машин пищевой промышленности и снижения напряженно-деформированного состояния целесообразно контуры круговых отверстий подкреплять материалом из инородного материала.

Задача об оценке влияния инородных упругих включений на напряженное состояние в плоскости

с двоякопериодической системой круговых отверстий возникает при исследовании напряженно-деформированного состояния деталей, выполненных в виде пластин, ослабленных системой отверстий, часть которых заполнена упругими шайбами из другого материала. Этот случай важен, так как к нему могут быть сведены задачи расчета на прочность перфорированных днищ с трубками, проходящими через отверстия в решетке и скрепленными с ней. В таком варианте задача о подкреплении упругими включениями рассматривается впервые.

Исследуем напряженное состояние перфорированного сита (барабана) шнекового пресса для отжима жидкой фазы из растительного сырья, когда сито подкреплено упругими кольцевыми шайбами. Итак, на основании сказанного приходим к следующей постановке задачи о расчете напряженного состояния перфорированной пластины, растягиваемой в направлениях осей Ox и Oy напряжениями σ_x и σ_y

$$\sigma_x = \frac{pR}{S}; \quad \sigma_y = \frac{pR}{2S}.$$

Рассмотрим двоякопериодическую треугольную решетку с круговыми отверстиями радиуса λ ($\lambda < 1$), заполненные линейно-сжимаемой жидкостью и круговыми включениями радиуса ρ ($\rho + \lambda < 2/\sqrt{3}$). Начало координат поместим в центре одного из отверстий, ось x направим вдоль линии центров, а ось y ей ортогонально. Предполагается, что инородные включения плоскопараллельных смещений не совершают.

Центры отверстий оказываются в точках

$$P_{mn} = mw_1 + nw_2 \quad (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$\omega_1 = 2; \quad \omega_2 = 2/e^{1/3\pi i},$$

а центры включений — в точках

$$P'_{mn} = P_{mn} + \frac{2}{\sqrt{3}}e^{1/6\pi i}; \quad P''_{mn} = P_{mn} + \frac{2}{\sqrt{3}}e^{-1/6\pi i}.$$

Обозначим контур отверстия с центром в точке P_{mn} через L_{mn} , контуры включений с центрами в точках P'_{mn} и P''_{mn} соответственно L'_{mn} и L''_{mn} (рисунок 1).

Для рассматриваемой задачи на контурах круговых отверстий имеем [6]:

$$\sigma_r = -q, \int_0^{2\pi} u_r d\theta = -\frac{\pi\lambda}{K}q,$$

где σ_r — нормальное напряжение; u_r — нормальное перемещение; q — искомое давление на окружности L_{mn} ; K — модуль объемного сжатия.

Второе равенство есть условие линейной сжимаемости жидкости. На основании формул Колосова-Мухелишвили [7] и краевых условий на контурах круговых отверстий и включений получим следующие граничные условия для двух пар аналитических функций $\Phi(z)$, $\Psi(z)$ и $\Phi^-(z)$, $\Psi^-(z)$

$$\Phi(t) + \overline{\Phi(t)} - e^{2i\theta} [t\Phi'(t) + \Psi(t)] = -q; \quad (1)$$

$$\int_0^{2\pi} \text{Re} \left\{ e^{-i\theta} [\chi\Phi(t) - t\overline{\Phi(t)} - \overline{\Psi(t)}] \right\} d\theta = -\frac{2\pi\lambda}{K} \mu q; \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \Phi^-(z) + \overline{\Phi^-(z)} - \frac{t^2}{\rho^2} \left[\frac{\rho^2}{t^2} \Phi^{-1}(t) + \Psi^-(t) \right] = \\ = \Phi^-(t) + \overline{\Phi^-(t)} - \frac{t^2}{\rho^2} \left[\frac{\rho^2}{t^2} \Phi'(t) + \Psi(t) \right]; \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \chi_0 \overline{\Phi^-(t)} - \Phi^-(t) + \frac{t^2}{\rho^2} \left[\frac{\rho^2}{t} \Phi^{-1}(t) + \Psi^-(t) \right] = \\ = \frac{\mu_0}{\mu} \left\{ \chi \overline{\Phi^-(t)} - \Phi^-(t) + \frac{t^2}{\rho^2} \left[\frac{\rho^2}{t} \Phi'(t) + \Psi(t) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4)$$

где функции $\Phi^-(z)$ и $\Psi^-(z)$ регулярны в области, занятой включением, μ_0 и χ_0 — постоянные материалы включения.

Условие (3) выражает, что силы, действующие с обеих сторон на элементы линии контакта (реакции включения), равны. Условие (4) выражает равенство смещений с обеих сторон точек линии контакта.

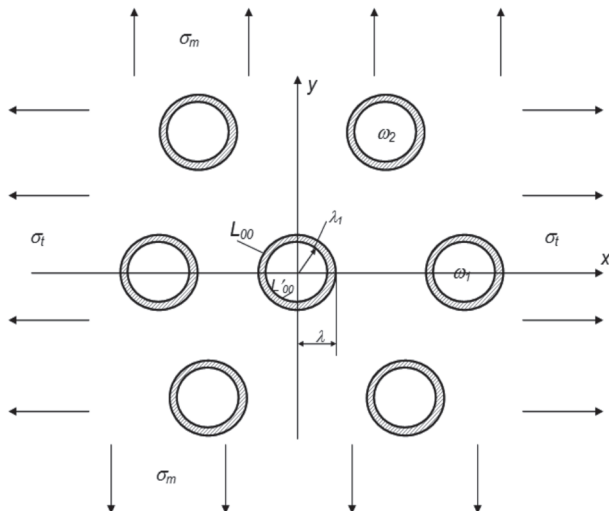


Рисунок 1 — Пластина подкреплённая упругими шайбами

Решение краевой задачи (1–4) ищем в виде

$$\Phi^-(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k} z^{2k}; \quad \Psi^-(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha'_{2k} z^{2k}; \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \varphi_0(z) + \varphi_1(z - z_0); \\ \psi(z) &= \psi_0(z) + \psi_1(z - z_0) - \bar{z}_0 \varphi_1'(z - z_0). \end{aligned} \quad (6)$$

Полагая при этом, что $j_0(z)$ и $y_0(z)$ — определяют решение упругой задачи при отсутствии включений, а $j_1(z)$, $y_1(z)$ решение упругой задачи при отсутствии отверстий. Точка P'_{mn} является центром контура L'_{00} .

Искомые функции должны удовлетворять следующим условиям симметрии:

$$\Phi_0 \left(z e^{\frac{1}{3}\pi i} \right) = \Phi_0(z); \quad \Psi_0 \left(z e^{\frac{1}{3}\pi i} \right) = \Psi_0(z) \cdot e^{-\frac{2}{3}\pi i};$$

$$\Phi_1 \left((z - z_0) e^{\frac{2}{3}\pi i} \right) = \Phi_1(z - z_0);$$

$$\Psi_1 \left((z - z_0) e^{\frac{2}{3}\pi i} \right) = \Psi_1(z - z_0) e^{-\frac{4}{3}\pi i}.$$

Таким образом, искомые функции разыскиваем в виде рядов [8]

$$\begin{aligned} \varphi_1(z - z_0) &= a_0(z - z_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_{3k} \cdot \rho^{3k}}{(3k-1)!} \gamma^{(3k-3)}(z - z_0); \\ \psi_1(z - z_0) &= b_0(z - z_0) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_{3k+2} \cdot \rho^{3k+2}}{(3k+1)!} \gamma^{(3k-1)}(z - z_0) - \\ &- \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_{3k} \cdot \rho^{3k}}{(3k-1)!} Q^{(3k-2)}(z - z_0); \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \Phi_0(z) &= \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_{6k} \lambda^{6k}}{(6k-1)!} \gamma^{(6k-2)}(z); \\ \Psi_0(z) &= \beta_0(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_{6k+2} \lambda^{6k+2}}{(6k+1)!} \gamma^{(6k)}(z) - \\ &- \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_{6k} \lambda^{6k}}{(6k-1)!} Q^{(6k-1)}(z), \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} \gamma(z) &= \frac{1}{z^2} + \sum_{m,n} \left[\frac{1}{(z - P_{mn})^2} - \frac{1}{P_{mn}^2} \right]; \\ Q(z) &= \sum_{m,n} \left\{ \frac{\bar{P}_{mn}}{(z - P_{mn})^2} - 2z \frac{\bar{P}_{mn}}{P_{mn}^3} - \frac{\bar{P}_{mn}}{P_{mn}^2} \right\}, \end{aligned}$$

$\gamma(z)$ — эллиптическая функция Вейерштрасса; $Q(z)$ — специальная мероморфная функция.

Условие равенства нулю главного вектора сил, действующих на дугу, соединяющую две конгруэнтные точки в области D , приводят к соотношениям

Таблица 1 — Значения нескольких первых коэффициентов α_{2k}, β_{2k} для треугольной сетки отверстий

λ	α_2	α_4	α_6	α_8	α_{10}	α_{12}	β_2	β_4	β_6	β_8	β_{10}	β_{12}	β_{14}
0,35	15,1685	3,7877	0,6643	0,0271	0,0113	0,0011	51,9290	49,2290	13,2435	3,8712	0,2776	0,1316	-0,0818

$$A_0 = \frac{\pi}{4\sqrt{3}} \rho^2 B_2, \quad B_0 = 0;$$

$$\alpha_0 = \frac{\pi}{4\sqrt{3}} \lambda^2 \beta_2, \quad \beta_0 = 0.$$

Разлагая искомые функции (5), (7), (8) в окрестности точек $z = 0, z = z_0$ и подставляя соответствующие разложения в граничные условия (1–4), а также сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $\exp(i\theta)$, получим бесконечные системы линейных алгебраических уравнений относительно $a_{2k}, a'_{2k}, A_k, B_k, \alpha_k, \beta_k$ и одно уравнение для определения искомого давления q .

Для искомого давления q находим

$$q = \frac{1 + \chi}{1 - \frac{\mu}{K}} \left[\alpha_0 + \frac{1}{4} (\sigma_i + \sigma_m) + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{6k} \lambda^{6k} \cdot r_{0,6k-2} + \Phi_1(z_0) \right].$$

Таблицы значений функций $\gamma(z)$ и $Q(z)$ и их производных в точке $z_0 = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{\frac{1}{6}\pi i}$ даны в монографии [8].

Для анализа напряженного состояния проводились расчеты на компьютере при помощи программы MatLab. Ограничивались первыми двумя приближениями. Степень перфорации принималась равной $0,2 \div 0,9$.

Анализ существующих методов расчета [9, с. 229] не дает более точных результатов и во многом предполагает увеличение материалоемкости нагруженных элементов устройств, в данном случае толщину стенки цилиндра. Проведенные нами исследования в области повышения точности расчета ситовых элементов устройств показывают, что значения напряжений в точке 2, приведенные в книге [9, с. 230], являются слишком завышенными, и автор [9] считает, что надо увеличить толщину стенки барабана, так как имеет место превышение предела текучести. Уточненный расчет, проведенный нами для этого случая, показал, что в этом необходимости нет. Исключение составлял лишь случай, когда степень перфорации была равна 0,8.

В качестве примера рассмотрено напряженное состояние перфорированного барабана яблочного пресса РЗ-ВП2-Ш-5, которое образовано из сит, собранных по длине пресса в секции. Сита выполнены перфорированными по треугольной сетке с шагом $S = 20$ мм, диаметр отверстий $d = 10$ мм,

средний радиус цилиндра $R = 260$ мм, толщина стенки барабана $S = 8$ мм. Максимальное осевое давление $p_{\max} = 5,5$ МПа. Цилиндр выполнен из стали 1Х13 (предел текучести $\sigma_t = 410$ МПа), материал шайб — сталь 5ХНМ. Параметр λ , представляющий собой отношение диаметра отверстия к расстоянию между центрами отверстий, принимался равным 0,35.

По полученным системам алгебраических уравнений были рассчитаны значения нескольких первых коэффициентов α_{2k}, β_{2k} для комплексных потенциалов, а значения напряжений, полученных при помощи формул Колосова-Мухелишвили [7] выявило, что напряжение для случая не подкрепленного сита превышает предел текучести материала сита только в точке 2 ($\sigma_1 = 381$ МПа, $\sigma_2 = 486$ МПа).

Значения коэффициентов α_{2k}, β_{2k} для случая расположения центров отверстий по вершинам равносторонних треугольников и значения параметра $\lambda = 0,35$ при $\sigma_t = 179$ МПа; $\sigma_m = 89,5$ МПа приведены в таблице 1.

С помощью таблицы 1 и формул Колосова-Мухелишвили [7] можно найти напряжения в любой точке перфорированного барабана шнекового пресса (см. рисунок 1). В таблице 2 приведены напряжения σ_0 в характерной точке 1 и напряжения σ_0 в точке 2 на контуре отверстия при степени перфорации $\lambda = 0,35$, где также даны значения напряжений полученных экспериментальным путем в интервале величин бокового давления $p = 0,5–2,3$ МПа. Зависимость максимальных значений давления от расстояния представлена на рисунке 2.

Таблица 2 — Значения напряжений в характерных точках 1 и 2

Величина бокового давления, МПа	0,5	1,0	1,5	2,0	2,3
Значения напряжений, полученные расчетным путем					
$\sigma_0^{(1)}$	73,70	111,91	132,12	174,67	247,86
$\sigma_0^{(2)}$	127,32	158,43	179,76	213,30	272,46
Значения напряжений, полученные экспериментальным путем					
$\sigma_0^{(1)}$	93,40	130,34	147,83	182,72	250,22
$\sigma_0^{(2)}$	119,41	169,17	210,09	237,45	283,29

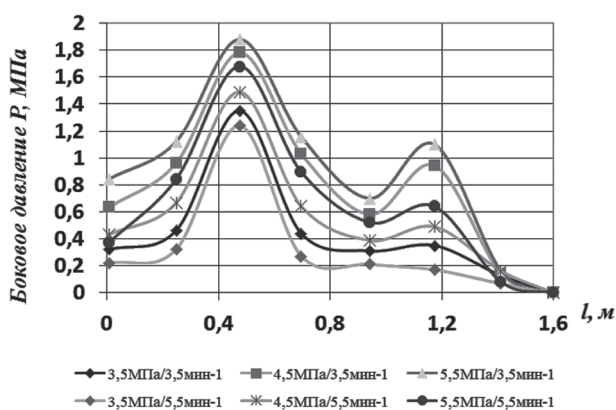


Рисунок 2 — Зависимость максимальных значений давления в цилиндре пресса от расстояния

Значения напряжений в характерных точках 1 и 2 при степени перфорации $\lambda = 0,35$, приведенные в таблице 2, показывают, что наибольшее значение напряжения, соответствующее точке 2, при значении максимального бокового давления в прессуемой камере в 2,3 МПа, значительно ниже предельно допустимого для материала сита $[\sigma_1] = 410$ МПа.

Значит, составляя по весу незначительное количество, подкрепление упругими кольцевыми включениями пластины значительно снижает уровень его напряженно-деформированного состояния.

Список литературы

1. Howland, R.C. J. Stress in a plate containing an infinite row of holes / R.C. J. Howland // Proc. of the Roy. Soc. of London. Ser. A. — 1935. — Vol. 148, Pp. 471–491.
2. Натанзон, В.Я. О напряжениях в растягиваемой пластинке, ослабленной одинаковыми отверстиями, расположенными в шахматном порядке / В.Я. Натанзон // Матем. сб. — 1935. — Т. 42, № 5. — С. 616–636.
3. Григолюк, Э.И. Об одном методе решения двоякопериодических задач теории упругости / Э.И. Григолюк, А.М. Куршин, Л.А. Фильштинский // Прикладная механика. — 1965. — Т. 1, № 1. — С. 22–31.
4. Григолюк, Э.И. Упругое равновесие изотропной плоскости с двоякопериодической системой включения / Э.И. Григолюк, Л.А. Фильштинский // Прикладная механика. — 1966. — Т. 2, № 9. — С. 1–7.
5. Фильштинский, Л.А. Задачи теплопроводности и термоупругости для плоскости, ослабленной двоякопериодической системой одинаковых круглых отверстий / Л.А. Фильштинский // Тепловые напряжения в элементах конструкций / сб. науч. тр. Ин-та механики АН УССР. — Киев: Наук. думка, 1964. — Вып. 4. — С. 103–112.
6. Амензаде, Ю.А. Вдавливание штампа в полуплоскость с круговыми отверстиями, заполненными жидкостью / Ю.А. Амензаде // Механика деформируемых тел и конструкций. — М.: Машиностроение, 1975. — С. 32–38.
7. Мухелишвили, Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н.И. Мухелишвили. — М.: Наука, 1966. — 707 с.
8. Григолюк, Э.И. Перфорированные пластины и оболочки / Э.И. Григолюк, Л.А. Фильштинский. — М.: Наука, 1970. — 556 с.
9. Соколов, В.И. Основы расчета и конструирования машин и аппаратов пищевых производств / В.И. Соколов. — М.: Машиностроение, 1983. — 447 с.

Kasumov R.F.

The effect of foreign elastic inclusions on the stress state of perforated plates sieve devices

The paper investigates the effect of elastic ring inclusion of foreign-native material on the stress-deformation state of the sieve plate device. In the task is considered a perforated plate, weakened by a doubly periodic system of circular holes, some of which are underpinned by resilient washers. To solve of the proposed problem obtained the system of algebraic equations and find the complex potentials representations of equations and obtained a formula for determining the pressure on the contour of the hole.

Keywords: stress-strain state of the perforated plate, the elastic ring inclusion

Поступил в редакцию 15.09.2013.